

Wie Eratosthenes die Erde vermessen hat

Copyright Daniela Friedl
daniela@datunddat.de

Eratosthenes von Kyrene - Leben und Werk

Wenn wir etwa 2200 Jahre in der Geschichte zurückwandern, kommen wir in eine Zeit, in der Pi nur zu einem Wert von etwa 3 bekannt war und in der ein Kreis noch nicht in 360 Grad zerlegt wurde. Das war die Zeit, in welcher man nichts über den Ursprung des Nils wusste und man sich Gedanken über die Antipoden, die sogenannten Gegenfüßler, die auf der anderen Seite der Erde lebten, machte. In dieser Zeit lebt Eratosthenes von Kyrene. Eratosthenes war Wissenschaftler im wahrsten Sinne des Wortes und nur im entferntesten war er auch Vermesser. Für die Geodäsie ist er aber vor allem durch seine Erdmessung von Bedeutung. Er war der erste, der mit wissenschaftlichen Mitteln die Größe der Erde bestimmt hat. Eratosthenes hat aber nicht deshalb die Erde vermessen, weil es ihn interessiert hat. Vielmehr war diese Erdmessung Mittel zum Zweck. Denn Eratosthenes hatte eigentlich vor, eine Weltkarte zu erstellen und für eine Einordnung der Strecken innerhalb dieser Karte wollte er die Gesamtgröße der Erde ermitteln.

Wenn ich sage, wir wollen uns 2200 Jahre zurückversetzen, dann meine ich damit genau die Zeit von 284 bis 202 vor Christus. In dieser Zeit lebt Eratosthenes vermutlich, denn über seine Lebensdaten sind nur widersprüchliche Aussagen im Umlauf, aber diese sind die wahrscheinlichsten. Er wurde in Kyrene geboren, was heute Libyen ist und studierte sowohl dort als auch in Alexandria. Mit etwa 20 Jahren ging er nach Athen zu weiteren Studien, bis er etwa 240 v. Chr. vom Ptolomäer-König nach Alexandria berufen wurde. Dort führte er die berühmte Bibliothek von Alexandria, während er nebenbei noch die Aufgabe zur Erziehung des Kronprinzen innehatte. Bis zu seinem wahrscheinlich selbstgewählten Tod durch freiwilliges Hungern (er war immerhin schon über 80) blieb er in Alexandria und widmete sich seinen Forschungen. Wie schon erwähnt, war Eratosthenes ein Wissenschaftler schlecht hin. Sein größtes Charakteristikum könnte die Vielseitigkeit sein. Aus diesem Grund wurde er auch scherzhaft "Pentathlos" genannt, was soviel wie Fünfkämpfer bedeutet. Er bekam diesen Spitznamen wegen seinem Interesse an allen Wissenschaften und auch darum, da er es in keiner Disziplin zur absoluten Spitze schaffte. So kam auch sein zweiter Spitzname "Beta" zustande, was etwa "Nummer Zwei" bedeutete. Von seinen Werken sind nur noch Fragmente erhalten. Die wichtigsten Belege über sein Schaffen, vor allem die über die Bestimmung der Erde, sind bei Cleomedes (150 Jahre später) und bei Strabon (200 Jahre später) zu finden. Eratosthenes war mit Begeisterung Mathematiker, wobei das "Sieb des Eratosthenes", was ein Verfahren zur Primzahlenbestimmung ist, uns noch heute von Bedeutung ist. Er beschäftigte sich auch mit der Verdopplung der Würfel und anderen Proportionsproblemen. Wir wissen, dass er astronomische Werke verfasst hat. Er beschäftigte sich mit chronologischen Übersichten und dem Kalenderproblem. Teilweise wird erzählt, dass er zum ersten mal Schaltjahre einführte. Nicht nur naturwissenschaftlich war er sehr bewandert, sondern auch in der Geisteswissenschaft. So verfasste er das epische Werk Hermes und ein Gedicht Erigone. Weiterhin analysierte er dramatische Werke, interessierte sich für Grammatik und beschäftigte sich mit der Musiktheorie. Nicht umsonst bezeichnete er sich als Philologe, "Freund der Wissenschaft". Für uns ist aber seine Tätigkeit als Geograph und Vermesser am spannendsten. Auf diesem Gebiet veröffentlichte er zwei Werke: ein 3-bändiges Werk "Geographika" mit Länderbeschreibungen, Erdkarte und historischen Daten und ein Buch mit dem Titel "Über die Erdmessung", welches den genauen Hergang seiner Erdmessung darstellt, uns aber leider nicht mehr zu Verfügung steht. Darin bestimmt er die Ekliptikschiefe zu 24° mit großer Genauigkeit und berechnet auch den Erdumfang.

Lebensdaten	ca. 284 – 202 v. Chr.
Spitzname Pentathlos (Fünfkämpfer):	Mathematiker, Geograph, Dichter, Historiker, Philologe
Bibliothekar an der großen Bibliothek von Alexandria	
ca. 220 v. Chr. Erdumfangbestimmung	

Werke, nur in Fragmenten erhalten:

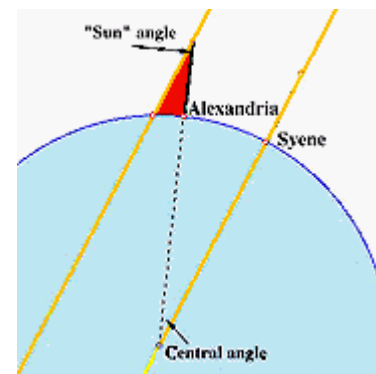
Geographische und geodätische Schriften:

- "Geographika" und "Über die Erdmessung"
- Mathematische Forschung: "Sieb des Eratosthenes"
- Poetische Werke: "Hermes" und "Erigone"

Die Erdmessung des Eratosthenes / Prinzip der Erdmessung

Durch die Kriegszüge Alexander, dem Großen und neue Seefahrten war das geografische Wissen der damaligen Zeit stark erweitert wurden. Eratosthenes hatten dadurch den Plan, eine neue Karte der Ökumene zu erstellen. Die Ökumene ist der bewohnbare Teil der Erdoberfläche. Um auf dieser Karte Strecken eintragen zu können, musste er die Größe der Erde bestimmen. Vorher war die Größe von Aristoteles zu 400000 Stadien und von Archimedes auf 300000 Stadien geschätzt wurden. Eratosthenes wollte den Umfang aber genau bestimmen. Dafür erdachte er sich ein wirklich einfaches und geniales Prinzip. Es waren folgende Voraussetzungen nötig: Eratosthenes suchte sich zwei Orte, die auf dem gleichen Meridian lagen, nämlich Syene, heute Assuan, und Alexandria. Heutzutage weiß man, dass diese Orte nicht die gleiche astronomische Länge haben, aber der Unterschied von fast 3 Grad war zu der damaligen Zeit kaum zu bestimmen. Weiterhin nahm Eratosthenes an, dass die Sonnenstrahlen parallel auf der Erde ankommen. Bekannt war auch, dass parallele Geraden, die von einer Geraden geschnitten werden, gleiche Gegenwinkel haben. Eratosthenes wusste auch, dass ein Kreissegment, dass von einem bestimmten Winkel ausgeschnitten wurde, gleiche Proportionen in Bezug auf den Vollkreis hatte. Heutzutage sagt man einfach Bogenformel dazu und jeder weiß, was gemeint ist.

Eratosthenes wusste von Erzählungen und Reiseberichten, dass Syene auf dem Wendekreis der Sonne liegt und dadurch zur Zeit der Sommersonnenwende mittags die Sonne im Zenit stand, also dass Schattenstäbe keine Schatten warfen. Alexandria hingegen lag nördlicher und man konnte von senkrecht stehenden Objekten Schatten beobachten. Mit dieser Überlegung bestimmte er den Winkel, mit welchem die Sonnenstrahlen auf die Erde trafen und hatte somit den Gegenwinkel im Erdmittelpunkt. Im Bild dürfte das klar erkennbar sein. Er brauchte nun nur noch die Strecke zwischen Syene und Alexandria und konnte über die Bogenformel den Umfang bestimmen. Es ist ersichtlich, dass die Lage von Syene keine große Rolle spielte, denn diese Messung kann an beliebigen Orten des Meridian stattfinden. (Dann müsste man nur die beiden Winkel voneinander subtrahieren.)



- Beobachtung auf einem Meridian zur Zeit der Sommersonnenwende
- Syene: Sonne im Zenit
- Alexandria: Winkelmessung des Schattenwurfs eines senkrecht stehenden Objektes
- Gemessener Winkel entspricht Zentriwinkel im Erdmittelpunkt
- Streckenbestimmung zwischen Alexandria und Syene
- Bogenformel zur Erdumfangbestimmung:

$$U = \frac{360^\circ}{\alpha} \cdot s$$

Bestimmung von Winkel, Strecke und Umfang

Jetzt stellt sich aber die Frage, wie Eratosthenes nun genau den Winkel und die Strecke bestimmt hat. Bei der Winkelmessung hat die Wissenschaft mit der Rekonstruktion der Bestimmung keine Probleme, da die Berichte eindeutige Aussagen enthalten. Eratosthenes hat demnach den Winkel mit Hilfe eines Horologiums bestimmt.

Dies ist eine Art Sonnenuhr, die aus einer Skaphe und einem Gnomon besteht. Unter einer Skaphe versteht man eine Halbkugelschale, die mit einer Teilung, wahrscheinlich in 60stel des Kreises, versehen ist. In deren Mitte befindet sich ein Gnomon, ein Schattenstab. An dem Bild erkennt man,

dass der Schattenstab einen Schatten wirft, wenn die Sonne auf das Horologium scheint. Auf diese Weise kann man den Winkel ablesen, mit dem die Sonnenstrahlen eintreffen. Eratosthenes hat damit einen Winkel von einem Fünfzigstel des Vollkreises bestimmt. Das entspricht $7^\circ 12'$. Bei der Streckenmessung ist man sich der Durchführung nicht so im klaren. Man vermutet, dass Eratosthenes keine direkte Messung vorgenommen hat, sondern mehrere Quellen miteinander verglichen hat und sich daraus die Strecke zusammensuchte. Als Grundlagen dienten ihm die ägyptische Landmessung, die schon 2000 v.Chr. ziemlich genau die Nillängen bestimmt hat.



Weiterhin gab es Berichte von Bematischen, welche beamtete Schrittzähler waren, die bestimmte Strecken abschritten und topographische Besonderheiten, Flora und Fauna der Gebiete aufzeichneten. Wahrscheinlich hat Eratosthenes auch die Aussagen von Fahrten auf dem Nil und von Kamelkarawanen benutzt. Er erhielt letztlich einen Wert von 5000 Stadien, woran man deutlich erkennt, dass er hier stark gerundet hat, also keine genaue Bestimmung benutzte. Wenn also diese 5000 Stadien einem Fünfzigstel des Kreises entspricht, so muss der Vollkreis 250000 Stadien groß sein. Zu diesem Ergebnis kam auch Eratosthenes.

- Winkelmessung in Alexandria:
 - Gerät: Horologium
 - Messung des Winkels zu "einem Fünfzigstel des Vollkreises" ($7^\circ 12'$)
- Streckenmessung:
(zwischen Syene und Alexandria)
 - keine direkte Messung
 - Grundlage:
 - ägyptische Landesvermessung
 - Bematischenberichte (Schrittzähler)
 - Schiffsreisen auf dem Nil
 - Reisedauer von Kamelkarawanen
 - Ergebnis: 5000 Stadien
- Umfang:
 - Berechnung mit Bogenformel zu 250000 Stadien

Legenden und Mythen

Wie immer, wenn etwas sehr lang her ist und keine genauen Angaben existieren, öffnet dies Tür und Tor für Spekulationen. So war es natürlich auch mit Eratosthenes' Erdmessung und ihr wurden einige farbige Details hinzugefügt. Zum Beispiel liest man immer wieder die Geschichte, dass Eratosthenes in Syene in einen Brunnen sah und dort das Spiegelbild der Sonne erblickte. Dadurch wusste er, dass die Sonne in diesem Punkt am Zenit steht. Diese Legende lässt sich sehr leicht widerlegen, denn Syene liegt bzw. lag in Wirklichkeit nicht auf dem Wendekreis, sondern einige Minuten nördlich, so dass es gar nicht möglich war, die Sonne im Brunnen zu sehen. Außerdem war ja das clevere an der Sache, dass Eratosthenes (nun auch schon 60 Jahre alt) Alexandria nicht verlassen musste und nur in einem Ort eine Sonnenbeobachtung durchführte. Ein ähnliches farbiges Detail zur Unterstützung der Vorstellung ist wohl die Schifffahrt auf dem roten Meer. Eratosthenes soll bei einer in Nord-Süd-Richtung verlaufenden Seefahrt bemerkt haben, dass die Schatten erst nach Norden fallen, dann kleiner werden und verschwinden und schließlich wieder in Richtung Süden auftauchen. Aber auch diese Angabe kann wohl eher der Phantasie eines Autor zugeschrieben werden. Genauso verhält es sich mit der Schilderung, Eratosthenes hätte unter persönlicher Leitung eine direkte Streckenmessung mittels Messseilen durchgeführt, doch auch hierfür gibt es keine Belege und die Strecke von 5000 Stadien ist dafür viel zu gerundet. Ein englisches Lehrbuch spricht gar von geeichten Kamelen zur Streckenbestimmung, die etliche Kalibrierungsläufe absolvieren mussten, um herauszufinden, wie viele Stadien sie in einem Durchlauf der Sanduhr zurücklegen. Und auch die sehr anschauliche Aussage, dass der Winkel mit einem Obelisken oder Turm und dessen Schatten bestimmt wurde, kann wissenschaftlich nicht bestätigt werden. Diese hohen Steinsäulen sind für die Schattenmessung denkbar ungeeignet, denn der Schatten bildet keine genau Spitze, sondern ist wegen der Größe der Sonne unscharf.

Außerdem hätte der Winkel dann über den Tangens berechnet werden müssen und man käme niemals zu einem Ergebnis von "einem Fünfzigstel des Vollkreises".

- Brunnen des Eratosthenes
- Schifffahrt auf dem roten Meer
- direkte Streckenmessung
- Geeichte Kamele
- Schatten eines Obeliskens

Ergebnisse

Aber wie genau war Eratosthenes nun wirklich? Bei einem Vergleich mit dem heutigen Wert muss man überlegen, welchen Erdumfang man zu Rate zieht. Sicherlich ist die Bogenlänge der Meridianellipse das beste Vergleichsobjekt, denn Eratosthenes hat ja eigentlich in Richtung des Meridians gemessen. Diese entspricht einem Wert von 40008 km. Aber die Abplattung der Erde spielt in seinem Genauigkeitsbereich eigentlich keine große Rolle. Dass Eratosthenes sich seiner bedingten Genauigkeit bewusst war, sieht man auch an der Tatsache, dass er seinen errechneten Wert von 250000 auf 252000 Stadien korrigierte. Dieser Wert lässt sich nämlich besser durch die damalige Einteilung des Kreises in Hexekosten (60stel) und durch Pi teilen, was mit etwa 3 bekannt war. Oft wird das Argument gebracht, dass man die Zahl auch besser durch 360 Grad teilen kann und damit die Größe eines Grades von 700 Stadien erhält, aber die Gradeinteilung wird eigentlich erst Hipparch zugesprochen (2. Jh v.Chr.). Wenn wir uns nun mit der Umrechnung ins metrische System beschäftigen, taucht gleich das Problem auf, dass es zu seiner Zeit etwa 7 gebräuchliche Stadionmaße gab. Die drei wahrscheinlichsten sind in der Tabelle angegeben. Die Wissenschaft nimmt heute an, dass Eratosthenes mit dem nach ihm benannten Stadion gerechnet hat, welches einer babylonischen Normung entsprach. Somit käme er auf ein Ergebnis von 37400 km und daraus würde sich ein Fehler von 7 % gegenüber der Meridianellipse ergeben. Oft wird auch von einem Stadion der ägyptischen Normung gesprochen, da sich die Messung in Ägypten abspielte und man vermutete, dass auch ein ägyptisches Maß verwendet wurde. Es ergäbe sich somit auch eine Abweichung von nur 1 %, aber leider ist dieses Stadion in den alten Schriften nicht eindeutig belegt.

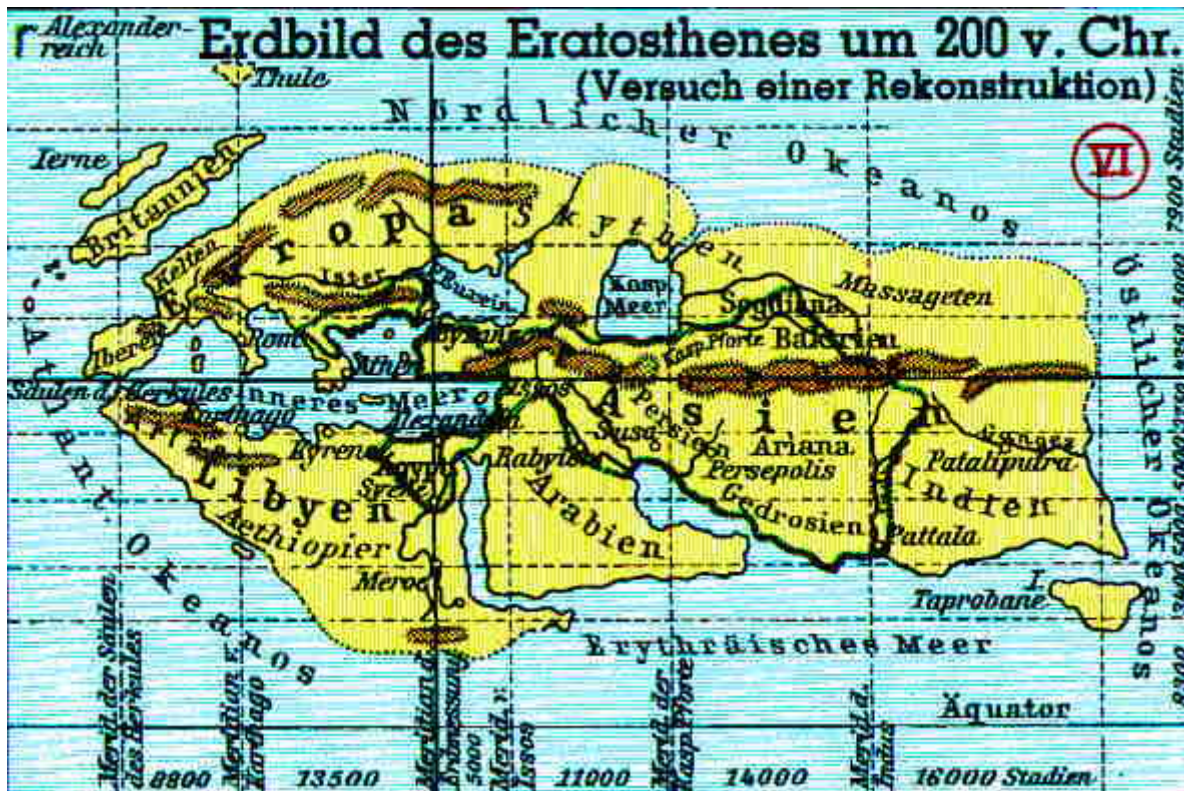
In vielen Lehrbüchern findet man die Angabe des Umfangs mit 46800 km, welche sich aus der Umrechnung des römischen Stadions ergibt. Da das römische Reich eine große Macht in der Jahrtausendwende wurde, nimmt man an, dass römische Autoren den Wert von Eratosthenes einfach mit ihrem eigenen Stadion gleichgesetzt haben und dieser Wert somit in die Geschichte einging, aber höchstwahrscheinlich falsch ist.

Vergleich mit heutigem Wert:	Meridianellipse 40008 km
Zwei Ergebnisse:	250000 und 252000 Stadien
Umrechnung in metrisches Maß schwierig:	7 unterschiedliche Stadionmaße bekannt (99 – 210 m)

Stadion	Wert	Umfang	Fehler
Eratosthenisch	148,5 m	37400 km	7 %
Ägyptisch	157,5 m	39700 km	1 %
Römisch	185,6 m	46800 km	17 %

Genauigkeitsbetrachtung

vermutlich Ceylon darstellt, aber auch Australien sein könnte.



Anlass zur Erdmessung:

Erstellung einer Karte der Ökumene

Grundlage:

- Reiseberichte (v.a. Pytheas von Massilia)
 - terrestrische und astronomische Beobachtungen
- erstmalig Einteilung in Längen- und Breitengrade

Bedeutung über seine Zeit hinaus

Anhand dieser Leistungen, die Eratosthenes vollbracht hat, ist es leicht zu erklären, warum wir Geodäten ihn als den Urvater der Vermessung bezeichnen und warum kaum ein Lehrbuch oder eine Vorlesung auf eine kurze Darstellung seiner Methode verzichtet. Die Erdmessung des Eratosthenes ist lange Zeit an Methodik und Resultaten nicht übertroffen worden. So kommt es auch, dass seine Werte bis ins 16. Jh. verwendet wurden und gar Galilei und Vasco da Gama bei der ersten Seefahrt nach Indien sich darauf stützten. Oft wurden seine Werte auch mit anderen Umrechnungen verwendet, so dass oft falsche Angaben in den damaligen Büchern standen, aber sein Verfahren war so einzigartig, dass es noch den heutigen Gradmessungen zugrunde liegt. Zwar wurden später bessere Ergebnisse erzielt, vor allem durch die Entwicklung der Mechanik, aber etwas konzeptionell Neues wurde erst mit der Satellitengeodäsie geschaffen. Interessant ist auch, dass sich die Schulen im Astronomieunterricht wieder praktisch mit Eratosthenes Erdmessung auseinandersetzen. So werden mit Partnerschulen weltweit Winkel über Schatten gemessen und daraus der Erdumfang bestimmt. Na, wenn das für Eratosthenes keine Ehre ist... Wir können über die Genauigkeit seiner Erdmessung nur spekulieren und über die messtechnische Durchführung sind wir nur unvollkommen unterrichtet, aber beachtenswert bleibt die Anordnung der Messung. Dann ist es auch kaum von Belang, ob mit 10 oder 1000 km Genauigkeit der Erdumfang vor 2200 Jahren gemessen wurde. Allein der einmalige Gedanke und die angewendete Methode sind es, die zählen.

Eratosthenes' Bedeutung bis heute:

- Urvater der Vermessung
- Begründer eines einzigartigen Verfahrens, das bis heute dem Prinzip der Gradmessung zugrunde liegt

- Ergebnisse bis ins 16. Jh. übernommen
- heutige Schulprojekte nach seiner Methode

Quellennachweis

- SCHWARZ, K. P. (1975): "Zur Erdmessung des Eratosthenes", Allgemeine Vermessungsnachrichten, Heft 1, S. 1-12
- BRETTERBAUER, K. (1999): "Wie Eratosthenes die Erde gemessen hat", Vermessungswesen und Raumordnung, Heft 2, S. 73-81
- BIALAS, V. (1982): "Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung", Konrad Wittwer, Stuttgart
- Der neue Pauly. Enzyklopädie der Antike (1998) Metzler, Stuttgart / Weimar, Bd. 4
- BACHMANN, E. (1965): "Wer hat Himmel und Erde gemessen?", Ott-Verlag, Thun/München
- SCHMIDT, F. (1935): "Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter", Neustadt a. d. Haardt

(c) Daniela und Thomas Friedl